


Firmware Multiplier

Prof. Alberto Borghese
Dipartimento di Informatica
borghese@di.unimi.it

Università degli Studi di Milano

Riferimenti sul Patterson 5a ed.: B.6 & 3.4


Sommario

Il moltiplicatore firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware

L'approccio firmware

Nell'approccio firmware, viene inserita nella ALU una unità di controllo e dei registri. L'unità di controllo attiva opportunamente le unità aritmetiche ed il trasferimento da/verso i registri. Approccio *"controllore-datapath"*.

Viene inserito un microcalcolatore dentro la ALU.

Il primo microprogramma era presente nell'IBM 360 (1964).

L'approccio firmware vs hardware

La soluzione HW è più veloce ma più costosa per numero di porte e complessità dei circuiti.

La soluzione firmware risolve l'operazione complessa mediante una sequenza di operazioni semplici. E' meno veloce, ma più flessibile e, potenzialmente, adatta ad inserire nuove procedure.

La soluzione HW è percorsa per le operazioni frequenti: la velocizzazione di operazioni complesse che vengono utilizzate raramente non aumenta significativamente le prestazioni (legge di Amdahl).

Algoritmi per la moltiplicazione

Il razionale degli algoritmi firmware della moltiplicazione è il seguente.

Si analizzano sequenzialmente i bit del moltiplicatore e si creano i **prodotti parziali**:

1) **Si mette 0** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore = 0).

2) Si mette una **copia del moltiplicando** (su n bit) nella posizione opportuna (se il bit analizzato del moltiplicatore è = 1).

Moltiplicando 1 1 0 1 1 x

Moltiplicatore 1 0 1 =

---

1 1 0 1 1 +

0 0 0 0 0 -

---

1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 - -

Prodotto 1 0 0 0 0 1 1 1

27 x 5 = 135

Shift (scalamento)

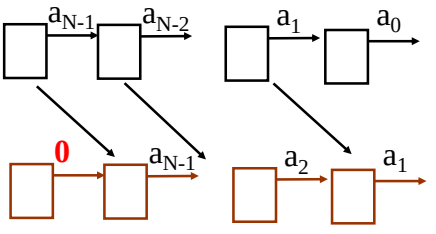
Dato A su 32 bit: $a_j = a_{j-k}$ k shift amount (>, =, < 0).

Effettuato al di fuori delle operazioni selezionate dal Mux della ALU, da un circuito denominato *Barrel shifter*.

Tempo comparabile con quello della somma.

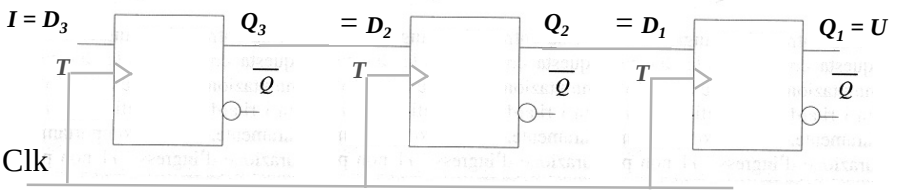
Operazioni codificate in modo specifico nell'ISA.

Esempio. shift dx 1 di una parola su N bit:



Il bit a_0 si "perde".
Il bit $a_{N-1} = 0$.
$a_k = a_{k+1}$ per k=0,1,2…. N-2

Registri

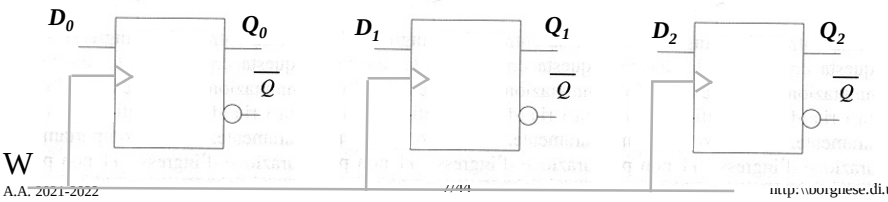


Registro a scorrimento (shift register o barrel shifter).

•Un unico ingresso I e un'unica uscita U.

•In presenza di un segnale attivo (clock alto), il contenuto viene spostato verso dx **di una posizione** (e.g. operazione di shift).

Registro di memoria



Moltiplicazione utilizzando somma e shift

Analizzo sequenzialmente **ogni bit b_k del moltiplicatore**:

A1) Sommo il moltiplicando al prodotto se $b_k = 1$.

A2) Sommo 0 al prodotto se $b_k = 0$.

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando (A' = A * 2).

27 x 11 = 297

```
1 1 0 1 1 x      A
0 1 0 1 1 =      B
----------------------
      1 1 0 1 1 +    A * 2^0
  1 1 0 1 1 - =      A * 2^1
----------------------
  1 0 1 0 0 0 1 +    P1 ParzSum
  0 0 0 0 0 - - =    0* 2^2
----------------------
  1 0 1 0 0 0 1 +    P2 ParzSum
    1 1 0 1 1 - - - =  A * 2^3
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1 +  P3 ParzSum
0 0 0 0 0 - - - - =  0* 2^4
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1    P Prodotto
1x2^8 + 1x2^5 + 1x2^3 + 1x2^0 =
256 + 32 + 8 + 1 = 297
```

Come gestiamo i primi due prodotti parziali?

Moltiplicazione utilizzando somma e shift

Analizzo sequenzialmente **ogni bit b_k del moltiplicatore** e applico ad ogni passo le stesse operazioni.

Per ogni bit (5 bit):

A1) Sommo il moltiplicando al prodotto se $b_k = 1$.

A2) Sommo 0 al prodotto se $b_k = 0$.

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando ($A' = A * 2$).

27 x 11 = 297

```
1 1 0 1 1 x          A
0 1 0 1 1 =          B
----------------------
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 +   Initial P=0
      1 1 0 1 1 =      A * 2^0
----------------------
0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 +   P1=P+A*2^1
        1 1 0 1 1 -  =  A * 2^1
----------------------
0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 +   P2=P1+A*2^2
      0 0 0 0 0 - - =   0* 2^2
----------------------
0 0 1 0 1 0 0 0 1 +     P3=P2
    1 1 0 1 1 --- =     A * 2^3
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1 +     P4 =P3+A*2^4
0 0 0 0 0 -- -- =       0* 2^4
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1       Final P=P4
```


Moltiplicazione utilizzando somma e shift

Analizzo sequenzialmente **ogni bit b_k del moltiplicatore** e applico ad ogni passo le stesse operazioni.

Per ogni bit (5 bit):

A1) Sommo il moltiplicando al prodotto se $b_k = 1$.

A2) Sommo 0 al prodotto se $b_k = 0$.

B) Shift a sx di un bit il moltiplicando ($A' = A * 2$).

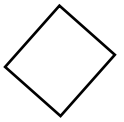
27 x 11 = 297

P contiene le somme parziali, al termine conterrà la somma totale, cioè il risultato del prodotto.


```
1 1 0 1 1 x          A
0 1 0 1 1 =          B
----------------------
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 +   Initial P=0
      1 1 0 1 1 =      A * 2^0
----------------------
0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 +   P1=P+A*2^1
        1 1 0 1 1 -  =  A * 2^1
----------------------
0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 +   P2=P1+A*2^2
      0 0 0 0 0 - - =   0* 2^2
----------------------
0 0 1 0 1 0 0 0 1 +     P3=P2
    1 1 0 1 1 --- =     A * 2^3
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1 +     P4 =P3+A*2^4
0 0 0 0 0 -- -- =       0* 2^4
----------------------
1 0 0 1 0 1 0 0 1       Final P=P4
```

Diagrammi di flusso (flow chart)

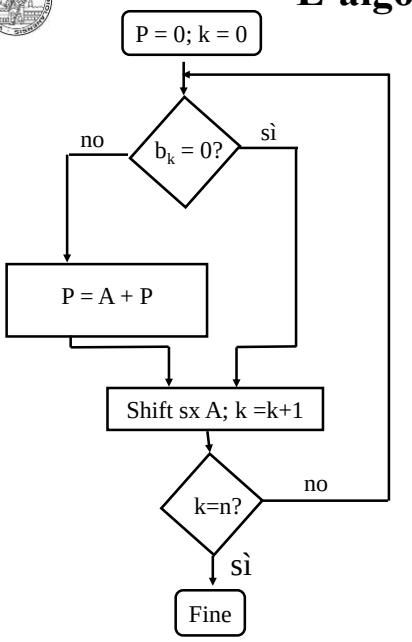
Inizio / terminazione



Test

Processo (esecuzione)

L'algoritmo



A → 1 1 0 1 1 x

B → 0 1 0 1 1 =

---

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 + Initial P=0

1 1 0 1 1 = $A * 2^0$

---

0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 + $P_1=P+A$

1 1 0 1 1 - = $A * 2^1$

---

0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 + $P_2=P_1+A$

0 0 0 0 0 - - = $0* 2^2$

---

0 0 1 0 1 0 0 0 1 + $P_3=P_2+0$

1 1 0 1 1 - - - = $A * 2^3$

---

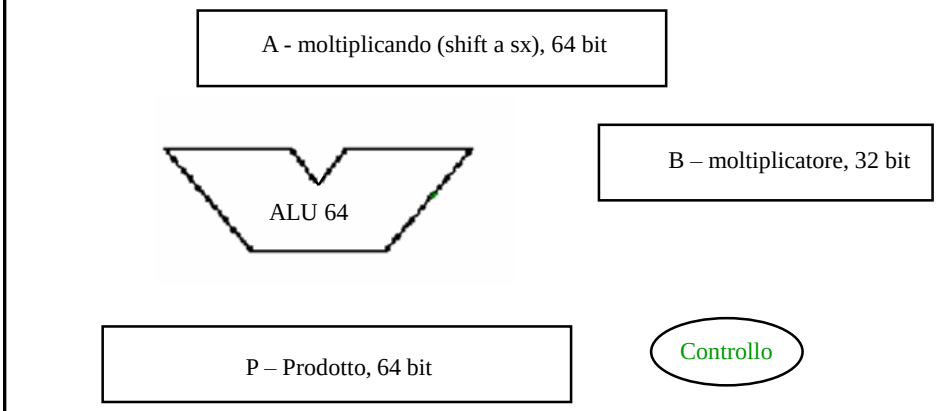
1 0 0 1 0 1 0 0 1 + $P_4=P_3+A$

0 0 0 0 0 - - - - = $0* 2^4$

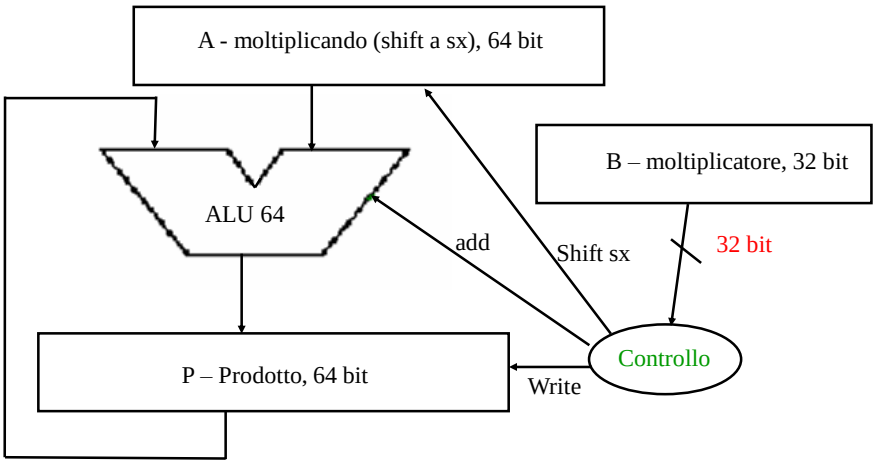
---

1 0 0 1 0 1 0 0 1 Final $P=P_4$

Implementazione circuitale – gli attori



Implementazione circuitale



Qual'è il problema?

Esempio su 4 bit

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000

A → 1 0 1 0 x
B → 1 0 1 1 =

---

0 0 0 0 0 0 0 0 + P

$A = A * 2^0$ 1 0 1 0 = A^0

---

0 0 0 0 1 0 1 0 + P_1

$A^1 = A * 2^1$ 1 0 1 0 - A^1

---

0 0 0 1 1 1 1 0 + P_2

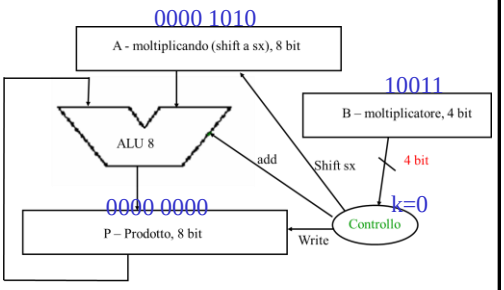
$A^2 = A * 2^2$ 0 0 0 0 - - A^2

---

0 0 0 1 1 1 1 0 + P_3

$A^3 = A * 2^2$ 1 0 1 0 - - - A^3

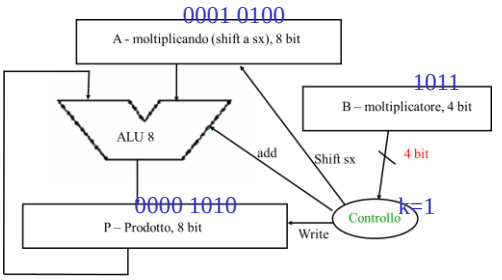
P → 0 1 1 0 1 1 1 0



Moltiplicazione su 4 bit.
11x10 = 110

Esempio – passo 1

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010

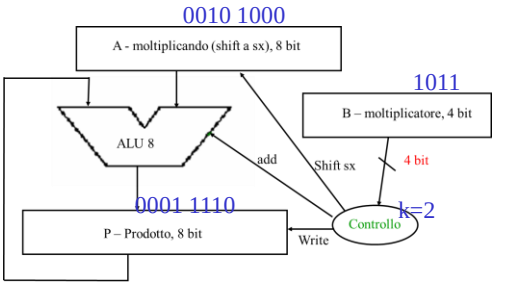


Moltiplicazione su 4 bit.

1010 x
1011 =

Esempio – passo 2

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110

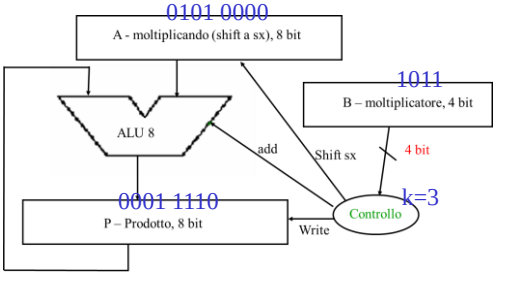


Moltiplicazione su 4 bit.

1010 x
1011 =

Esempio – passo 3

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b2=0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110



Moltiplicazione su 4 bit.

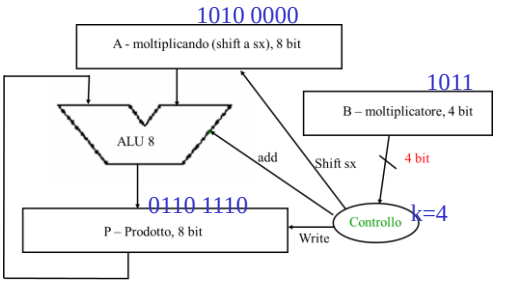
1010 x
1011 =

Esempio – passo 4

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b2=0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b3=1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

Moltiplicazione su 4 bit.

1010 x
1011 =



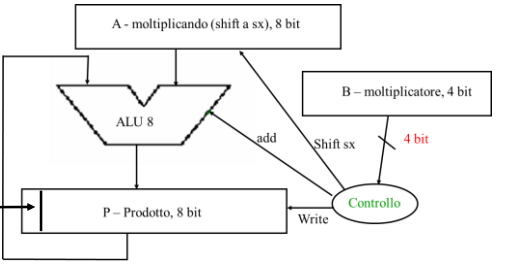
Esempio – riassunto

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	0001 0100	0000 1010
2	b1=1->P=P+A	1011	0001 0100	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0010 1000	0001 1110
3	b2=0->Nulla	1011	0010 1000	0001 1110
	Moltiplicando << 1	1011	0101 0000	0001 1110
4	b3=1->P=P+A	1011	0101 0000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	1011	1010 0000	0110 1110

Moltiplicazione su 4 bit.

1010 x
1011 =

Riporto bit intermedi



Esercizi

Costruire il circuito HW che esegui la moltiplicazione 7 x 9 in base 2 su 4 bit.

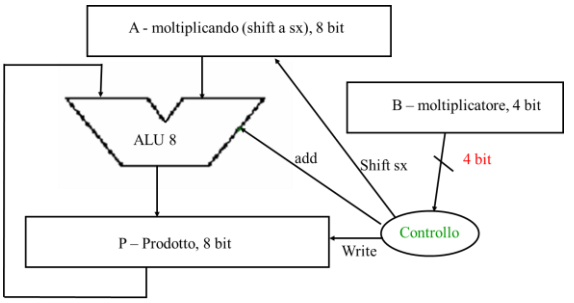
Eseguire la stessa moltiplicazione secondo l'algoritmo visto, indicando passo per passo il contenuto dei 3 componenti: A che contiene il moltiplicando, B che contiene il moltiplicatore e P che contiene somme parziali ed il risultato finale.

Sommario

I moltiplicatori firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware

Razionale - I

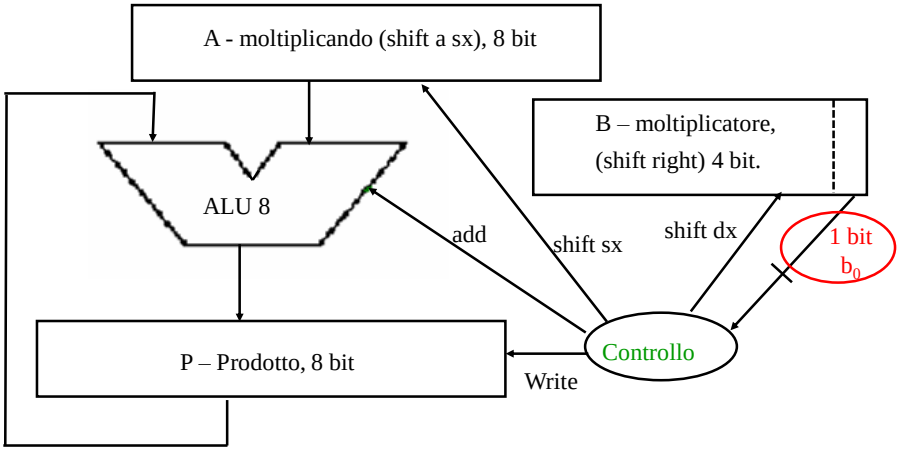


Per scegliere b_k, serve un mux all'interno dell'unità di controllo.

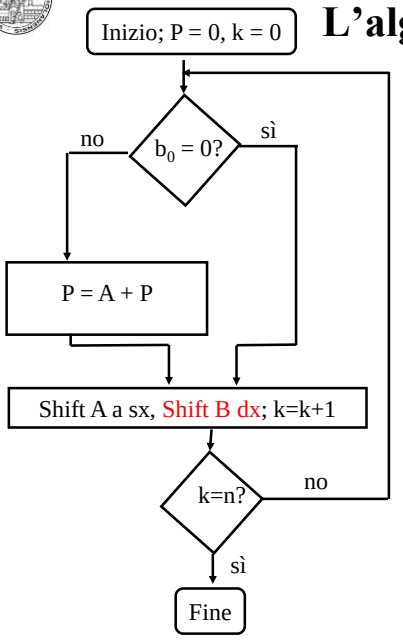
Posso ottenere lo stesso effetto in questo modo:

- Leggo b_0
- Shift a dx di una posizione di B

Implementazione circuitale ottimizzata - I



L'algoritmo - I



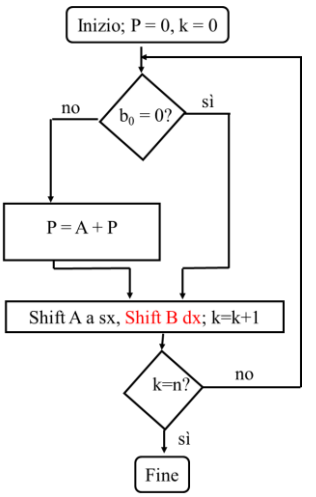
A → 1 0 1 0 x
B → 1 0 1 1 =

	0 0 0 0 0 0 0 0 +	P
$A = A * 2^0$	1 0 1 0 =	A^0
	0 0 0 0 1 0 1 0 +	P_1
$A^1 = A * 2^1$	1 0 1 0 -	A^1
	0 0 0 1 1 1 1 0 +	P_2
$A^2 = A * 2^2$	0 0 0 0 - -	A^2
	0 0 0 1 1 1 1 0 +	P_3
$A^3 = A * 2^2$	1 0 1 0 - - -	A^3
P →	0 1 1 0 1 1 1 0	

10 x 11 = 110

Esecuzione - I

Iterazione	Passo	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1010	0000 1011
1	b0=1->P=P+A	1010	1010 1011
	Prodotto >> 1	1010	0 1010 101
2	b0=1->P=P+A	1010	0 1010 101
	Prodotto >> 1	1010	0 11110 10
3	b0=0->Nulla	1010	0 11110 10
	Prodotto >> 1	1010	0 011110 1
4	b0=1->P=P+A	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	1010	0111 1110



Razionale per una seconda implementazione

Meta' dei bit del registro moltiplicando vengono utilizzati ad ogni iterazione.

Gli N bit del moltiplicando sommati al registro prodotto vengono incolonnati di una posizione più a sinistra a ogni iterazione.

Ad ogni iterazione 1 bit del registro prodotto viene calcolato definitivamente.

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	b0=1->P=P+A	0 101	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b0=0->Nulla	00 10	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b0=1->P=P+A	000 1	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110

Razionale per una seconda implementazione

Ad ogni iterazione sommo N cifre (pari al numero di cifre del moltiplicando).

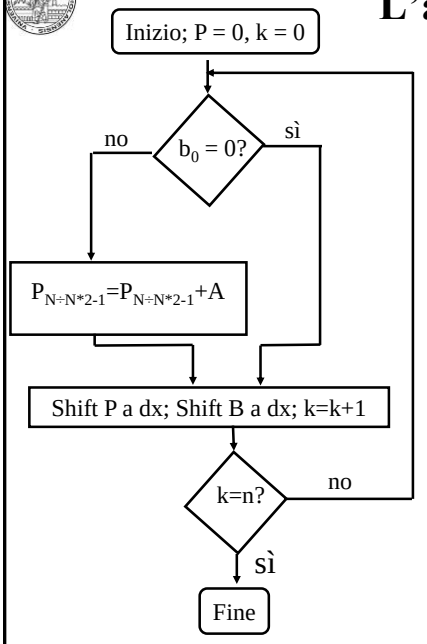
Spostamento di A a sx rispetto al registro prodotto, P.

Spostamento di P a dx rispetto al registro moltiplicando, A

Iterazione (k)	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	0000 1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	0000 1010	0000 1010
	Moltiplicando << 1	1011	000 1010 0	0000 1010
	Moltiplicatore >> 1	0 101	000 1010 0	0000 1010
2	b0=1->P=P+A	0 101	000 1010 0	0001 1110
	Moltiplicando << 1	0 101	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	00 10	00 1010 00	0001 1110
3	b0=0->Nulla	00 10	00 1010 00	0001 1110
	Moltiplicando << 1	00 10	0 1010 000	0001 1110
	Moltiplicatore >> 1	000 1	0 1010 000	0001 1110
4	b0=1->P=P+A	000 1	0 1010 000	0110 1110
	Moltiplicando << 1	0000	1010 0000	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010 0000	0110 1110

1 0 1 0 x
1 0 1 1 =
---
0 0 0 0 0 0 0 0 0 + P
1 0 1 0 = A^0
---
0 0 0 0 1 0 1 0 + P_1
1 0 1 0 - A^1
---
0 0 0 1 1 1 1 0 + P_2
0 0 0 0 - - A^2
---
0 0 0 1 1 1 1 0 + P_3
1 0 1 0 - - - A^3
---
0 1 1 0 1 1 1 0

L'algoritmo ottimizzato - II



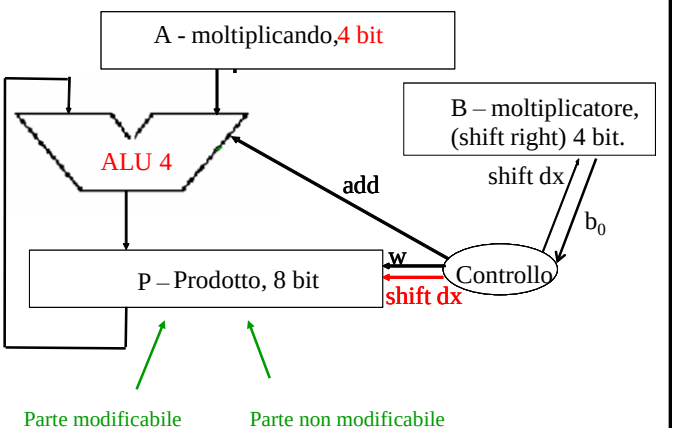
A → 1 0 1 0 x
B → 1 0 1 1 =

```
---------------------
0 0 0 0 0 0 0 0 +   P
      1 0 1 0 =     A0
---------------------
0 0 0 0 1 0 1 0 +   P1
    1 0 1 0 -       A1
---------------------
0 0 0 1 1 1 1 0 +   P2
    0 0 0 0 - -     A2
---------------------
0 0 0 1 1 1 1 0 +   P3
    1 0 1 0 - - -   A3
---------------------
```

P → 0 1 1 0 1 1 1 0

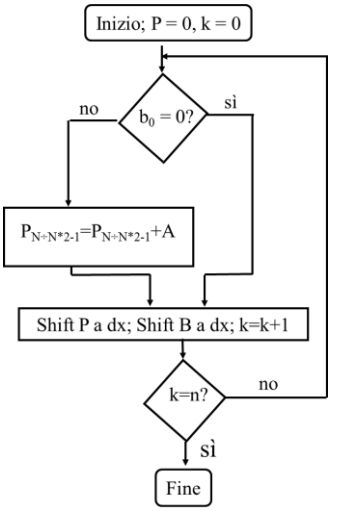
Implementazione ottimizzata - II

```
      1 0 1 0 x
      1 0 1 1 =
---------------------
0 0 0 0 0 0 0 0 +   P
      1 0 1 0 =     A0
---------------------
0 0 0 0 1 0 1 0 +   P1
    1 0 1 0 -       A1
---------------------
0 0 0 1 1 1 1 0 +   P2
    0 0 0 0 - -     A2
---------------------
0 0 0 1 1 1 1 0 +   P3
    1 0 1 0 - - -   A3
---------------------
0 1 1 0 1 1 1 0
```



Esecuzione - II

Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 000
2	b0=1->P=P+A	0 101	1010	0 1010 000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 11110 00
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 11110 00
3	b0=0->Nulla	00 10	1010	0 11110 00
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 011110 0
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 011110 0
4	b0=1->P=P+A	000 1	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	0000	1010	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0111 1110



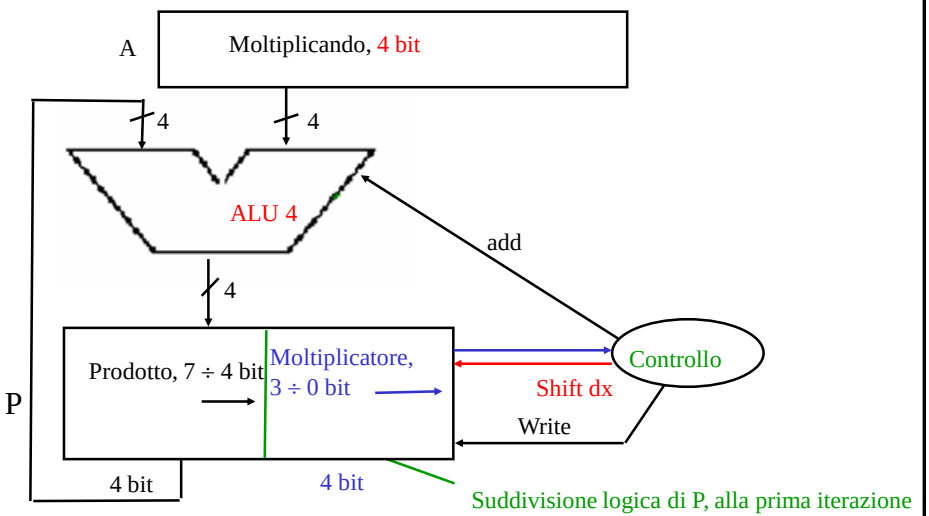
Razionale dell'implementazione - III

Il numero di bit del registro **prodotto** corrente (somma dei prodotti parziali) più il numero di bit da esaminare nel registro **moltiplicatore** rimane costante ad ogni iterazione (pari a 8 bit).

Si può perciò eliminare il registro moltiplicatore.

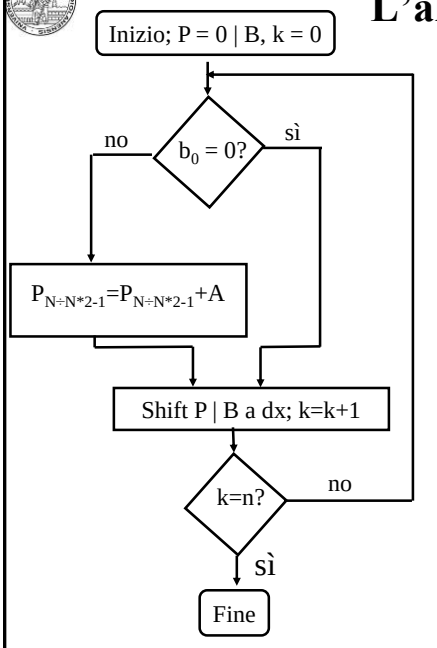
Iterazione	Passo	Moltiplicatore (B)	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1011	1010	0000 0000
1	b0=1->P=P+A	1011	1010	1010 0000
	Prodotto >> 1	1011	1010	0 1010 000
	Moltiplicatore >> 1	0 101	1010	0 1010 000
2	b0=1->P=P+A	0 101	1010	0 1010 000
	Prodotto >> 1	0 101	1010	0 11110 00
	Moltiplicatore >> 1	00 10	1010	0 11110 00
3	b0=0->Nulla	00 10	1010	0 11110 00
	Prodotto >> 1	00 10	1010	0 011110 0
	Moltiplicatore >> 1	000 1	1010	0 011110 0
4	b0=1->P=P+A	000 1	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	0000	1010	0110 1110
	Moltiplicatore >> 1	0000	1010	0111 1110

Circuito ottimizzato - III



Il moltiplicando è allineato sempre ai 4 bit più significativi del prodotto.
Ad ogni iterazione, il prodotto si allarga, il moltiplicatore si restringe.

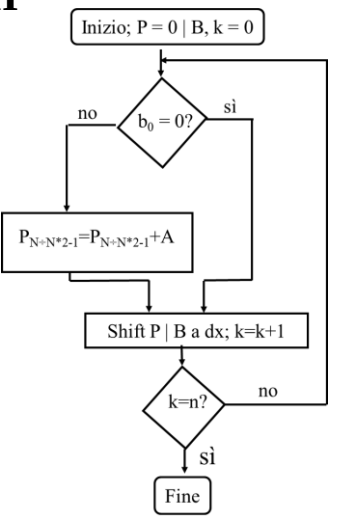
L'algoritmo ottimizzato - III




```
A ──►      1 0 1 0 x
B ──►      1 0 1 1 =
          ----------------------
          0 0 0 0 0 0 0 0 +     P
              1 0 1 0 =         A0
          ----------------------
          0 0 0 0 1 0 1 0 +     P1
              1 0 1 0 -         A1
          ----------------------
          0 0 0 1 1 1 1 0 +     P2
              0 0 0 0 - -       A2
          ----------------------
          0 0 0 1 1 1 1 0 +     P3
              1 0 1 0 - - -     A3
          ----------------------
P ──►     0 1 1 0 1 1 1 0
```

Esempio di esecuzione dell'algoritmo ottimizzato - III

Iterazione	Passo	Moltiplicando (A)	Prodotto (P)
0	Valori iniziali	1010	0000 1011
1	**p0=1**->P=P+A	1010	1010 1011
	Prodotto >> 1	1010	0 1010 101
2	**p0=1**->P=P+A	1010	0 1010 101
	Prodotto >> 1	1010	0 11110 10
3	**p0=0**->Nulla	1010	0 11110 10
	Prodotto >> 1	1010	0 011110 1
4	**p0=1**->P=P+A	1010	1 101110 0
	Prodotto >> 1	1010	0111 1110



Il moltiplicando è allineato (e sommato) ai bit più significativi del prodotto.

Approcci tecnologici alla ALU

Quattro approcci tecnologici alla costruzione di una ALU (e di una CPU):

– Approccio ROM. E' un approccio esaustivo (tabellare). Per ogni funzione, per ogni ingresso viene memorizzata l'uscita. E' utilizzabili per funzioni molto particolari (ad esempio di una variabile). Non molto utilizzato.

– Approccio hardware programmabile (e.g. PLA, FPGA). Ad ogni operazione corrisponde un circuito combinatorio specifico.

– Approccio firmware (firm = stabile), o microprogrammato. Si dispone di circuiti specifici solamente per alcune operazioni elementari (tipicamente addizione e sottrazione). Le operazioni più complesse vengono sintetizzate a partire dall'algoritmo che le implementa.

L'approccio firmware

Nell'approccio firmware, viene inserita nella ALU una unità di controllo e dei registri.

L'unità di controllo attiva opportunamente le unità aritmetiche ed il trasferimento da/verso i registri. Approccio *"controllore-datapath"*.

Viene inserito un microcalcolatore dentro la ALU.

Il primo microprogramma era presente nell'IBM 360 (1964).

L'approccio firmware vs hardware

La soluzione HW è più veloce ma più costosa per numero di porte e complessità dei circuiti.

La soluzione firmware risolve l'operazione complessa mediante una sequenza di operazioni semplici. E' meno veloce, ma più flessibile e, potenzialmente, adatta ad inserire nuove procedure.

La soluzione HW è percorsa per le operazioni frequenti: la velocizzazione di operazioni complesse che vengono utilizzate raramente non aumenta significativamente le prestazioni (legge di Amdahl).

Sommario

I moltiplicatori firmware

Ottimizzazione dei moltiplicatori firmware